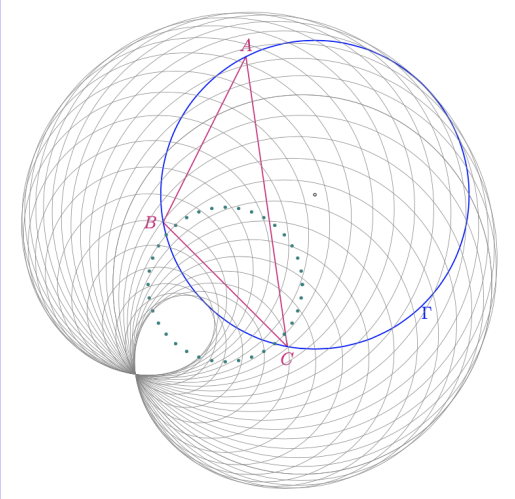
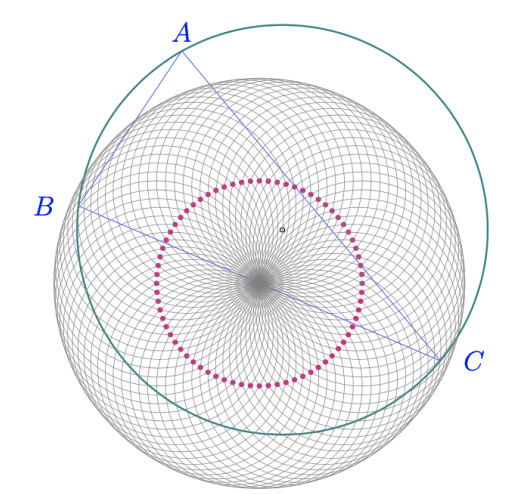
Ballade eulérienne sur un cercle circonscrit

Jean-Marc DESBONNEZ

Philippe TILLEUIL





2026

Table des matières

1 Enveloppes de cercles d'Euler **4**

1. Pour s'échauffer, quelques rappels 4
2. L'enveloppe des cercles d'Euler 5

2 Enveloppes de *pseudo-cercles d'Euler* **9**

1. Le contexte 9
2. Quelques échantillons d'images 9
3. Caractérisation des cercles 10
4. L'enveloppe des pseudo-cercles d'Euler : sa géométrie 14

Note des auteurs

Le projet initial était de s'intéresser à l'enveloppe des cercles d'Euler d'un triangle lorsque l'un des sommets se déplace sur le cercle circonscrit au triangle.

C'est l'objet du chapitre 1.

Une erreur de distraction (pour ne pas dire de débutant) est à l'origine du chapitre 2.
Un sommet du triangle se déplace toujours sur le cercle circonscrit, mais les cercles dont on cherche l'enveloppe ne sont pas des cercles d'Euler. Ils ont comme centre le centre du cercle d'Euler, mais passent par le sommet variable du triangle.
Pour la bonne cause, nous les avons appelés les *pseudo cercles d'Euler*. Ils ont été à l'origine de résultats extraordinaires, et de beaucoup d'heures de réflexion.

Dans le présent document, vous ne trouverez pas d'équations, mais uniquement de la géométrie plane, à l'ancienne !

Les images ont été dessinées à l'aide de l'extension *tkz-euclide* de LaTeX. Elle est constituée de macro-instructions issues de *Tikz*, aussi une extension de LaTeX.

L'extension *tkz-euclide* est due à Monsieur Alain MATTHÈS. Ses instructions sont orientées vers toute construction *à la Euclide*, qualifiée de construction *à la règle et au compas*.

Bonne lecture et bon amusement.

Chapitre 1

Enveloppes de cercles d'Euler

1. Pour s'échauffer, quelques rappels

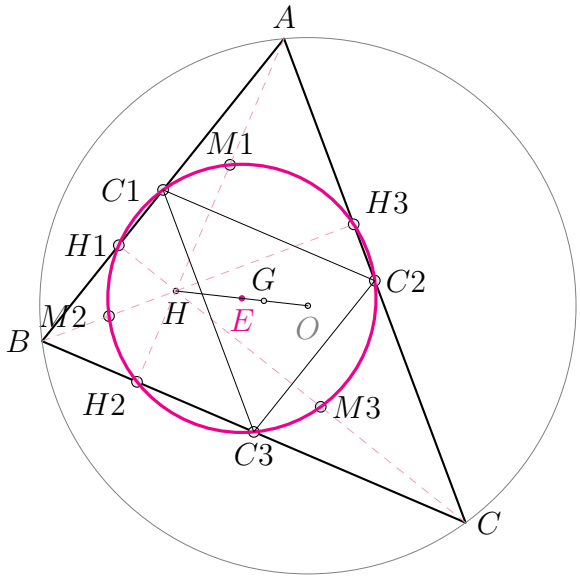


Figure 0

Légende

- un triangle quelconque ABC ;
- $C1$, $C2$ et $C3$, les milieux des 3 côtés ;
- $H1$, $H2$ et $H3$, les pieds des 3 hauteurs ;
- $M1$, $M2$ et $M3$, les milieux des segments joignant l'orthocentre H à chacun des sommets ;
- O, le centre du cercle circonscrit ;
- G, le centre de gravité ;
- E, le centre du cercle d'Euler ;
- ○, le cercle d'Euler.

1. Quel que soit le triangle ABC, son orthocentre H, le centre O de son cercle circonscrit et son centre de gravité (ou barycentre) G sont toujours trois points *alignés*. La droite qui les contient s'appelle — sans surprise ! — la *droite d'Euler*. De plus, on a la relation :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH} \tag{1.1}$$

2. Une des manières simples de *définir* le cercle d'Euler — ou cercle des neuf points — du triangle ABC, c'est de le présenter comme le cercle circonscrit au triangle médian du triangle ABC. Pour mémoire, le triangle médian du triangle ABC est celui dont les sommets sont les points-milieux des côtés du triangle en question.

On démontre ensuite que ce cercle circonscrit au triangle médian du triangle ABC passe aussi par les pieds des hauteurs du dit triangle, ainsi que par le milieu du segment $[AH]$, le milieu du segment $[BH]$, ainsi que le milieu du segment $[CH]$).

C'est à cause de ce résultat qu'on appelle alors ce cercle : le cercle des neuf points.

3. On démontre encore d'autres résultats remarquables concernant ce cercle.

D'abord, on établit que le centre de ce cercle d'Euler, noté E, est situé sur la droite d'Euler du triangle ABC. Ainsi, les *quatre* points : orthocentre, barycentre, centre du cercle circonscrit et centre du cercle d'Euler, sont donc toujours situés sur une seule et même droite. Plus Euler que ça, tu meurs !

De plus, on prouve aussi que ce centre E du cercle d'Euler est situé au *milieu* du segment $[H\mathrm{O}]$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{O}H} \tag{1.2}$$

Enfin, on démontre que l'homothétie de centre H et de rapport 2 envoie le cercle d'Euler du triangle ABC sur le cercle circonscrit à ce triangle.

4. C'est l'occasion de rappeler que, quels que soient les cercles Γ_1 et Γ_2 (non concentriques) de centres respectifs O_1 et O_2, et de rayons respectifs r_1 et r_2 avec $r_1 \neq r_2$, il existe :

— une homothétie directe de rapport $k_+ := \frac{r_2}{r_1}$ appliquant Γ_1 sur Γ_2,
— et une homothétie (dite) inverse, de rapport $k_- := -\frac{r_2}{r_1}$ appliquant aussi Γ_1 sur Γ_2.

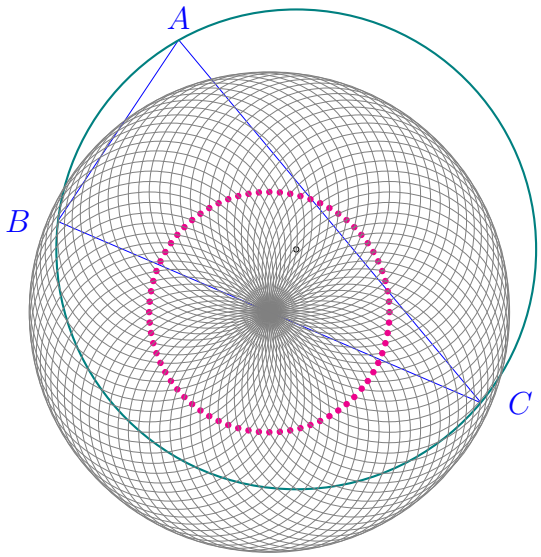
Les centres C_1 et C_2 de ces deux homothéties sont toujours situés sur la droite $d_{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$. Si les cercles Γ_1 et Γ_2 sont sécants et si le point $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, alors la droite d_{PC_1} est bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle $\widehat{\mathrm{O}_1P\mathrm{O}_2}$. Etc.

2. L'enveloppe des cercles d'Euler

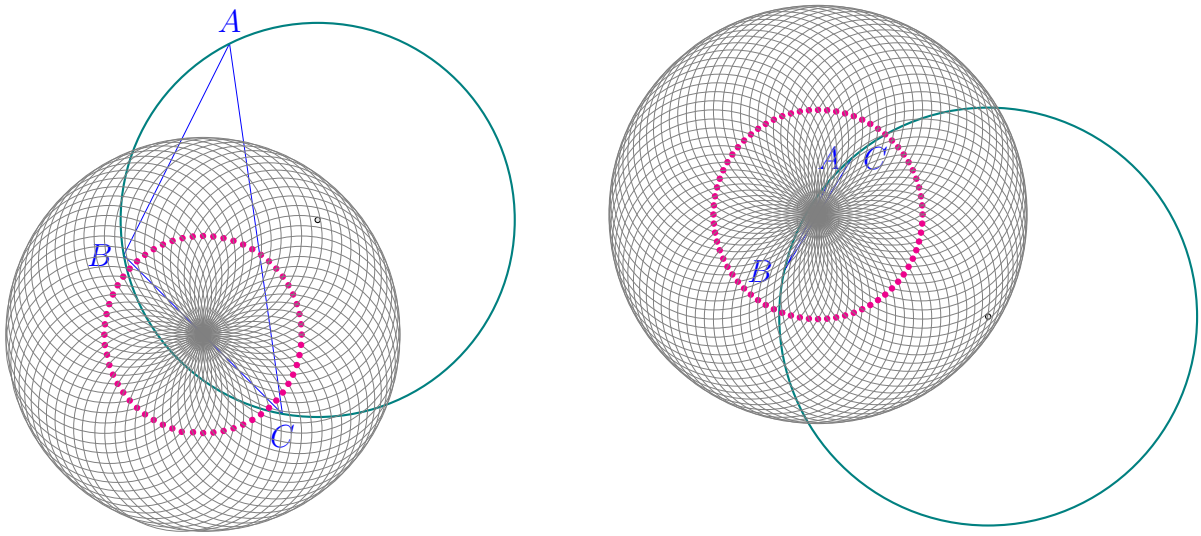
5. Pour être au clair : il s'agit de déterminer l'enveloppe des cercles d'Euler d'un triangle ABC, dont le cercle circonscrit et un côté sont fixés.

Autrement dit : il s'agit de déterminer l'enveloppe des cercles d'Euler d'un triangle ABC, lorsque, par exemple comme dans les images qui suivent, le côté BC de ce triangle est fixé, tandis que son sommet A se déplace sur un cercle de centre O fixé, dont le segment $[BC\,]$ est une corde.

Dans les images, on a en vert le cercle circonscrit, en magenta les centres des cercles d'Euler, et en gris les cercles d'Euler pour chaque position du sommet A.



Le résultat varie selon les positions des sommets fixes B et C :



Démontrons que l'enveloppe de ces cercles est un (autre) cercle et précisons ses caractéristiques.

Dans les dessins, c'est le côté BC qui est fixé, et le sommet A qui se déplace sur le cercle de centre O fixé.

6. Il s'ensuit que toute la situation admet la médiatrice du segment $[BC]$ comme axe de symétrie. Cela se vérifie dans toutes les étapes des raisonnements qui suivent, et nous n'y reviendrons plus. Et cela se voit pareillement, sur la figure 1 qui illustre toutes ces étapes, à la page 8.

7. Notons G_A le milieu (fixe) du segment fixe $[BC]$: quelle que soit la médiane issue du sommet (mobile) A, ce point-milieu lui appartient.

Quelle que soit la position du point A (sur le cercle de centre O et passant par B et C), le barycentre G du triangle ABC est toujours tel que :

$$\overrightarrow{G_AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{G_AA} \tag{1.3}$$

Mais cela signifie qu'il existe une homothétie de centre G_A et de rapport $\frac{1}{3}$ qui envoie le cercle circonscrit sur l'ensemble de tous les barycentres des triangles ABC, lorsque le sommet A varie sur ce cercle de centre O et passant par B et C. Cet ensemble de barycentres est donc aussi un cercle. On le note désormais β. Mais attention que le centre de ce cercle n'est pas le point G_A, mais bien le point O_β tel que, lui aussi :

$$\overrightarrow{G_A\mathrm{O}_\beta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{G_A\mathrm{O}} \tag{1.4}$$

Ce cercle β et ce point O_β sont représentés (en rouge) sur la figure 1.

8. Il vient immédiatement, de (1.1) et (1.2), que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{O}G}$$

Cela signifie que, quelle que soit la position du sommet A sur le cercle de centre O passant par B et C, le centre E du cercle d'Euler du triangle ABC est alors l'image, par une homothétie de centre O et de facteur $\frac{3}{2}$, du barycentre de ce même triangle.

Or, le n° **6** a déterminé le lieu correspondant — le cercle noté β — de ces barycentres. Il s'ensuit que le lieu des centres du cercle d'Euler du triangle ABC (variable en A) est aussi un cercle,

qui sera noté dorénavant ε. Le centre de ce cercle est un point, noté O_ε, qui est l'image, par cette homothétie de centre O et de facteur $\frac{3}{2}$, du centre O_β du cercle des barycentres. Or, il est bien clair que, d'après (1.4), on doit alors avoir :

$$\overrightarrow{\mathrm{OO}_\varepsilon} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OO}_\beta} = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OG}_A}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OG}_A}$$

Le centre O_ε du *cercle des centres* ε du cercle d'Euler du triangle ABC (variable en A) coïncide donc avec le point-milieu du segment $[BC]$.

Toutes ces propriétés sont illustrées aussi sur la figure 1. Le cercle, noté en *points gras* dans les figures des pages 5 et suivante, est à chaque fois un cercle ε, c'est-à-dire un cercle des centres des cercles d'Euler.

9. Cela achève de déterminer complètement l'enveloppe des cercles d'Euler du triangle ABC, dont le sommet A varie sur le cercle de centre O passant par les points fixes B et C.

En effet, par tout ce qui précède, ce ne peut donc plus être qu'un cercle, de centre $\mathrm{O}_\varepsilon \equiv G_A$, et de rayon égal à $2|G_A\mathrm{E}|$. Et c'est là exactement [1] le rayon du cercle circonscrit ! Autrement dit : l'enveloppe recherchée est exactement un cercle *translaté* du cercle circonscrit, le vecteur de translation étant le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OG}_A}$.

10. La figure 1 montre le cercle d'Euler, de centre E_{A_1}, correspondant à la position $A = A_1$ du sommet du triangle ABC. Le point G_{A_1} est le barycentre de ce triangle A_1BC.

La même figure 1 reprend aussi les deux configurations dans lesquelles le triangle ABC est en fait un triangle rectangle, en B ou en C. Les sommets correspondants sont les points, notés A_0 et A_2, qui sont les symétriques $B_\perp$ et $C_\perp$ des sommets B et C, par rapport au diamètre du cercle circonscrit qui est parallèle à d_{BC}. Les cercles d'Euler qui correspondent à ces triangles sont notés μ_2 et μ_1 ; ils sont aussi — en plus de G_A — les lieux des sommets des triangles médians du triangle (variable) ABC.

(1). Suivant les propriétés connues du cercle d'Euler, rappelées au n° **3**.

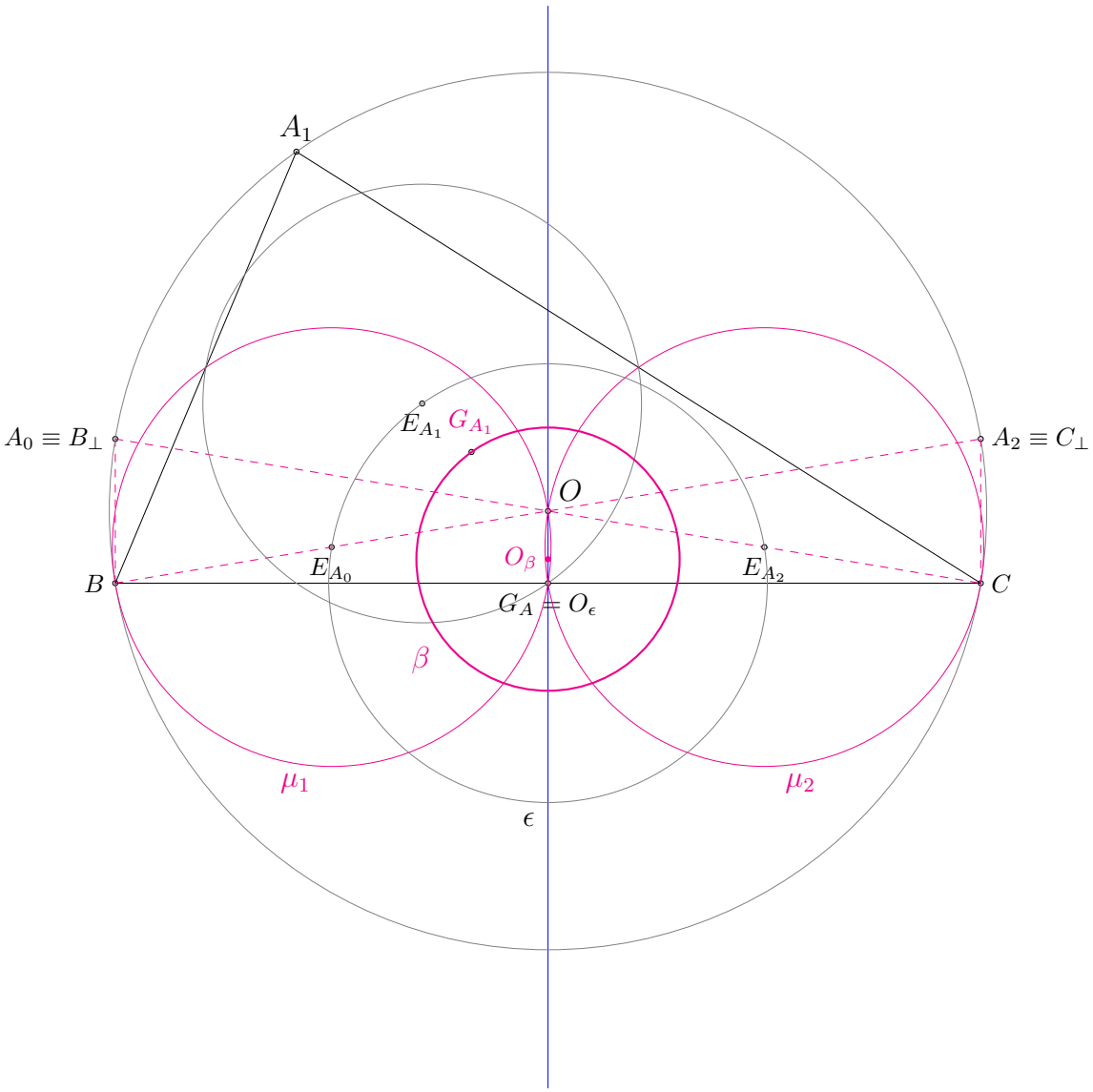

A_1
$A_0 \equiv B_\perp$
$A_2 \equiv C_\perp$
E_{A_1}
G_{A_1}
O
O_β
B
E_{A_0}
E_{A_2}
C
$G_A = O_\epsilon$
β
μ_1
μ_2
ϵ

Figure 1

Chapitre 2

Enveloppes de *pseudo-cercles d'Euler*

1. Le contexte

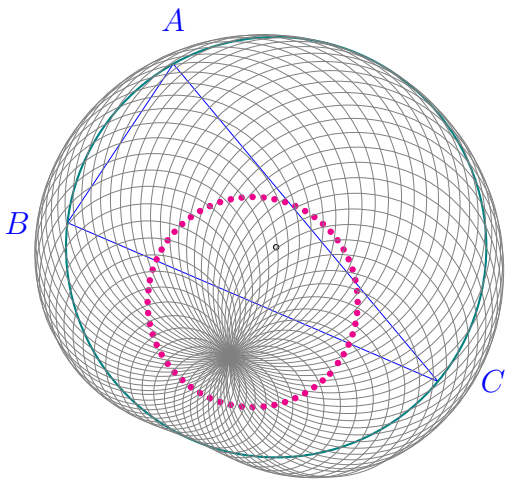
Pour dessiner un cercle, qu'il soit d'Euler ou un autre, le logiciel *tkz-euclide* a besoin de deux données : un centre et un rayon, un centre et un point, ou deux points définissant un diamètre.

Il y a une instruction *tkz-euclide* puissante qui calcule le centre d'un cercle d'Euler à partir des coordonnées des trois sommets d'un triangle. Pour dessiner le cercle, dans le chapitre précédent, nous avons choisi par facilité l'option « centre-point », avec comme point le milieu d'un côté du triangle (on avait neuf choix, voir rappel du chapitre 1).

Les images qui suivent sont en fait le résultat d'une erreur [1] : le point qui a été pris est le sommet A du triangle, point qui n'appartient pas au cercle d'Euler.

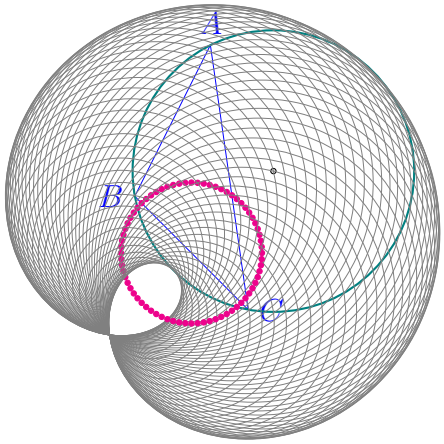
Les cercles qui suivent ne sont donc pas estampillés « Euler », mais ont le même centre, et avec une extrémité de rayon (A) qui se déplace sur le cercle circonscrit.

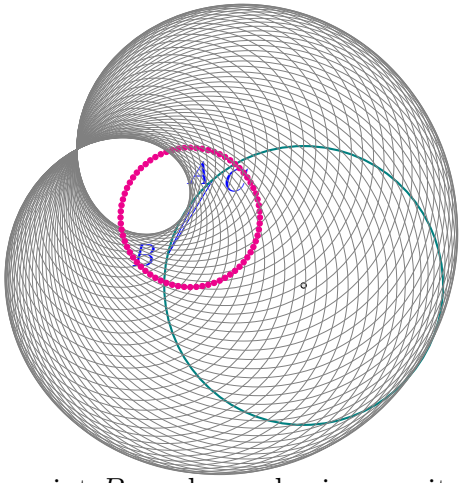
2. Quelques échantillons d'images



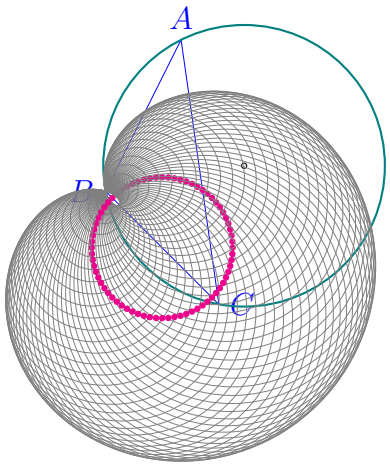
(1). Comme la tarte tatin ou la pénicilline… pour ne citer que deux domaines qui ont transformé l'Humanité !

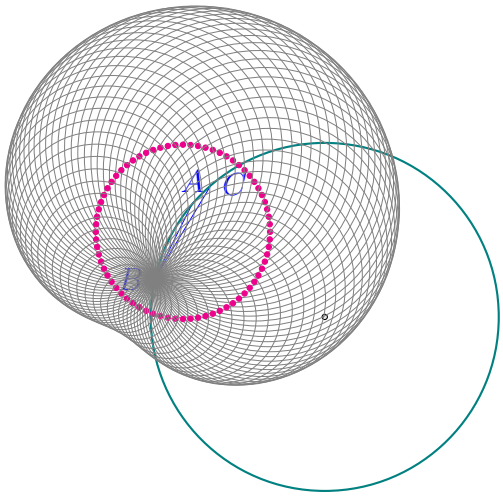
Le résultat dépend des positions des sommets fixes B et C.





On peut aussi fixer les points A et C, et faire varier le point B sur le cercle circonscrit :





3. Caractérisation des cercles

11. D'abord, on appelle *pseudo-cercle d'*Euler d'un triangle ABC, tout cercle dont le centre est celui du cercle d'Euler du triangle ABC, mais qui passe par (au moins) un des *sommets* de ce triangle.

Et le problème à résoudre est alors de déterminer l'enveloppe d'une famille de pseudo-cercles d'Euler d'un triangle ABC, dont le cercle circonscrit et un côté sont fixés.

Plus précisément : on considère un triangle ABC variable, dont le cercle circonscrit et le côté BC sont fixés, et il s'agit de déterminer l'enveloppe de la famille des pseudo-cercles d'Euler de ces triangles ABC, lorsque ces pseudo-cercles d'Euler sont astreints à passer par le sommet A.

Ici encore [(2)], toute la situation admet la médiatrice du segment $[BC]$ comme axe de symétrie.

12. La toute première chose à faire, c'est de caractériser un peu mieux ces pseudo-cercles d'Euler.

Le n° **8** a démontré que le cercle ε est le lieu des centres des cercles d'Euler du triangle ABC, lorsque le (seul) sommet A est variable. On se propose de démontrer que *tous* les pseudo-cercles d'Euler correspondants — c'est-à-dire ceux dont le centre est situé sur ε, et passent par le troisième sommet A (variable) du triangle ABC — passent aussi par un *point fixe*.

(2). Les autres cas (B variable et AC fixe, etc.) se traitent pareillement.

Pour cela, il faut utiliser ce qui a été établi précédemment, et en particulier dans les n° **7** et **8**.

La construction qui va être décrite dans les n° **13** à **15** ci-dessous, est illustrée par la figure 2.

13. On sait que *quelle que soit* la position du point $A = A_1$:

- le barycentre G_{A_1} du triangle A_1BC est situé sur un cercle β de centre O_β, et les points G_A, G_{A_1} et A_1 sont donc naturellement alignés,
- le centre E_{A_1} du cercle d'Euler du triangle A_1BC est aligné avec le barycentre G_{A_1} du dit triangle et le centre O de son cercle circonscrit.

On considère alors les triangles $A_1G_{A_1}\mathrm{O}$ et $G_AG_{A_1}\mathrm{E}_{A_1}$. En vertu de ce qui précède, ils sont opposés par leur sommet commun G_{A_1}. De plus, il résulte facilement de (1.1), (1.2) et (1.3) que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{G_AG_{A_1}} &= 2\cdot\overrightarrow{G_{A_1}A_1} \\ \overrightarrow{\mathrm{E}_{A_1}G_{A_1}} &= 2\cdot\overrightarrow{G_{A_1}\mathrm{O}} \end{cases}$$

Les triangles $G_AG_{A_1}\mathrm{E}_{A_1}$ et $A_1G_{A_1}\mathrm{O}$ sont donc semblables, et de rapport $2 \therefore 1$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_{A_1}G_A} = 2\cdot\overrightarrow{A_1\mathrm{O}} \tag{2.1}$$

De plus, par l'égalité des angles alternes-internes qui résulte de cette similitude, on tire aussi que :

$$d_{\mathrm{O}A_1} \parallel d_{\mathrm{E}_{A_1}G_A} \tag{2.2}$$

14. Mais surtout, si on *définit* alors un point L par :

$$\{\mathrm{L}\} \coloneqq d_{A_1\mathrm{E}_{A_1}} \cap d_{\mathrm{O}G_A} \tag{2.3}$$

il résulte de (2.2) et (2.1) que les triangles $\mathrm{E}_{A_1}\mathrm{L}G_A$ et $A_1\mathrm{LO}$ sont eux aussi semblables, et de rapport $2 \therefore 1$. On a donc :

$$\overrightarrow{\mathrm{LO}} = 2\cdot\overrightarrow{G_A\mathrm{O}} \tag{2.4}$$

mais tout particulièrement :

$$\overrightarrow{\mathrm{L}A_1} = 2\cdot\overrightarrow{\mathrm{L}\mathrm{E}_{A_1}} \tag{2.5}$$

Cela signifie que le point L est *aussi* situé sur le cercle de centre E_{A_1} et de rayon égal à $|\mathrm{E}_{A_1}A_1|$, qui est exactement le cercle pris en compte dans les dessins de la page 3 de l'article.

Autrement dit, si on note λ_1 le cercle de centre E_{A_1} passant par le point A_1 : c'est un pseudo-cercle d'Euler, et le segment $[LA_1]$ en est un *diamètre*.

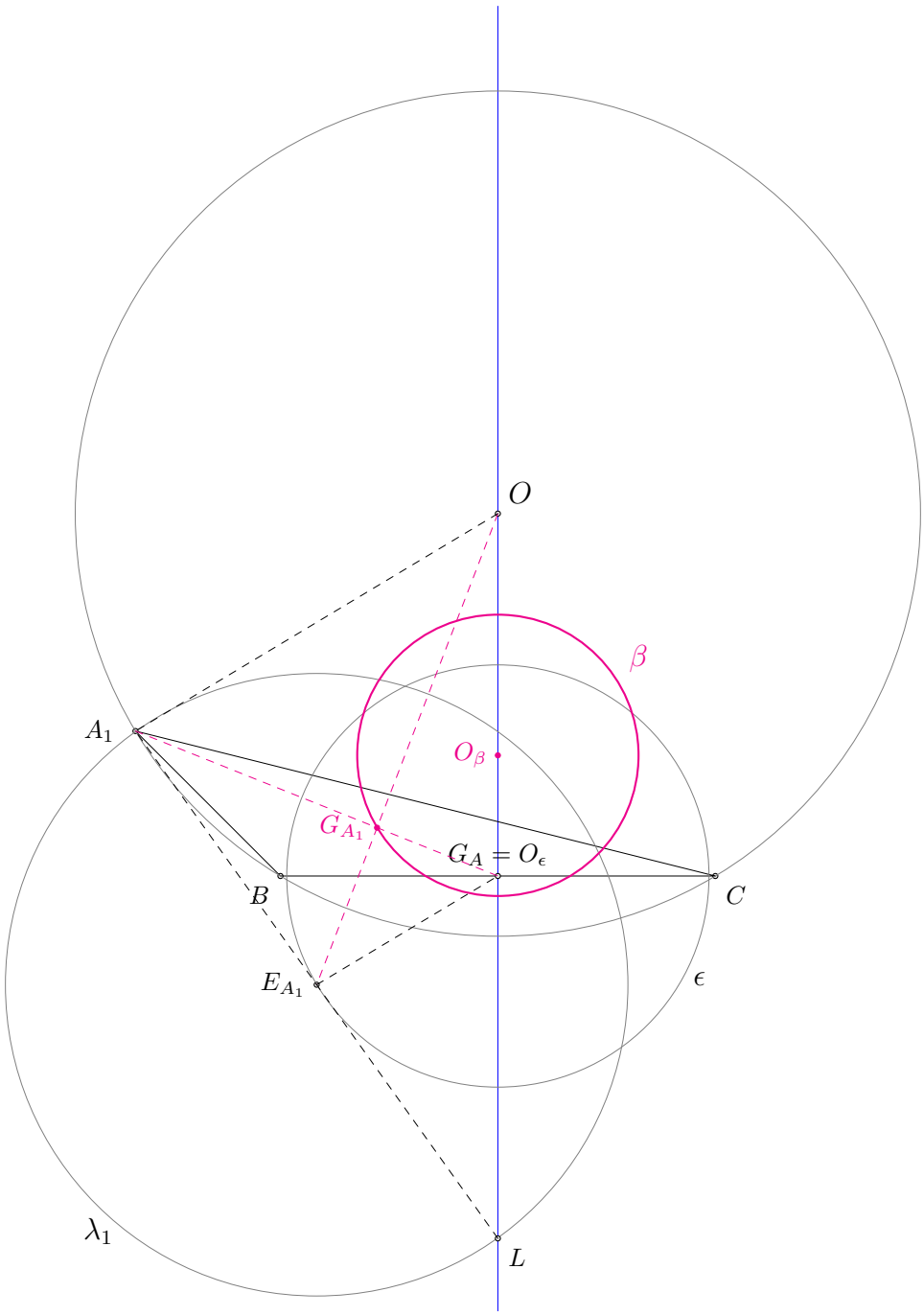


Figure 2

15. Par ailleurs, ce point L, défini par (2.3) se trouve avoir une position qui, suivant (2.4), est indépendante des diverses positions que peut prendre le point A.

16. On peut donc aussi « renverser la vapeur », et se servir *maintenant* de ce qui précède pour *construire* presque *a priori* le cercle ε des centres des cercles d'Euler. C'est exactement le lieu des milieux des segments [LA], quelle que soit la position du point A sur le cercle de centre O passant par B et C.

17. Plusieurs des cercles — ou plutôt : des pseudo-cercles d'Euler — en jeu dans le deuxième dessin de la page 6 du chapitre 1, sont ainsi caractérisés dans la figure 3 ci-après.

En particulier, le pseudo-cercle d'Euler qui y est noté λ_A est celui qui est associé au point A dans ce deuxième dessin.

Parmi les pseudo-cercles d'Euler représentés, les deux plus remarquables sont peut-être ceux qui, notés λ_O et λ'_O, sont associés aux triangles isocèles A_OBC et A'_OBC, où A_O (resp. A'_O) est le (resp. l'autre) point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle de centre O passant par B et C.

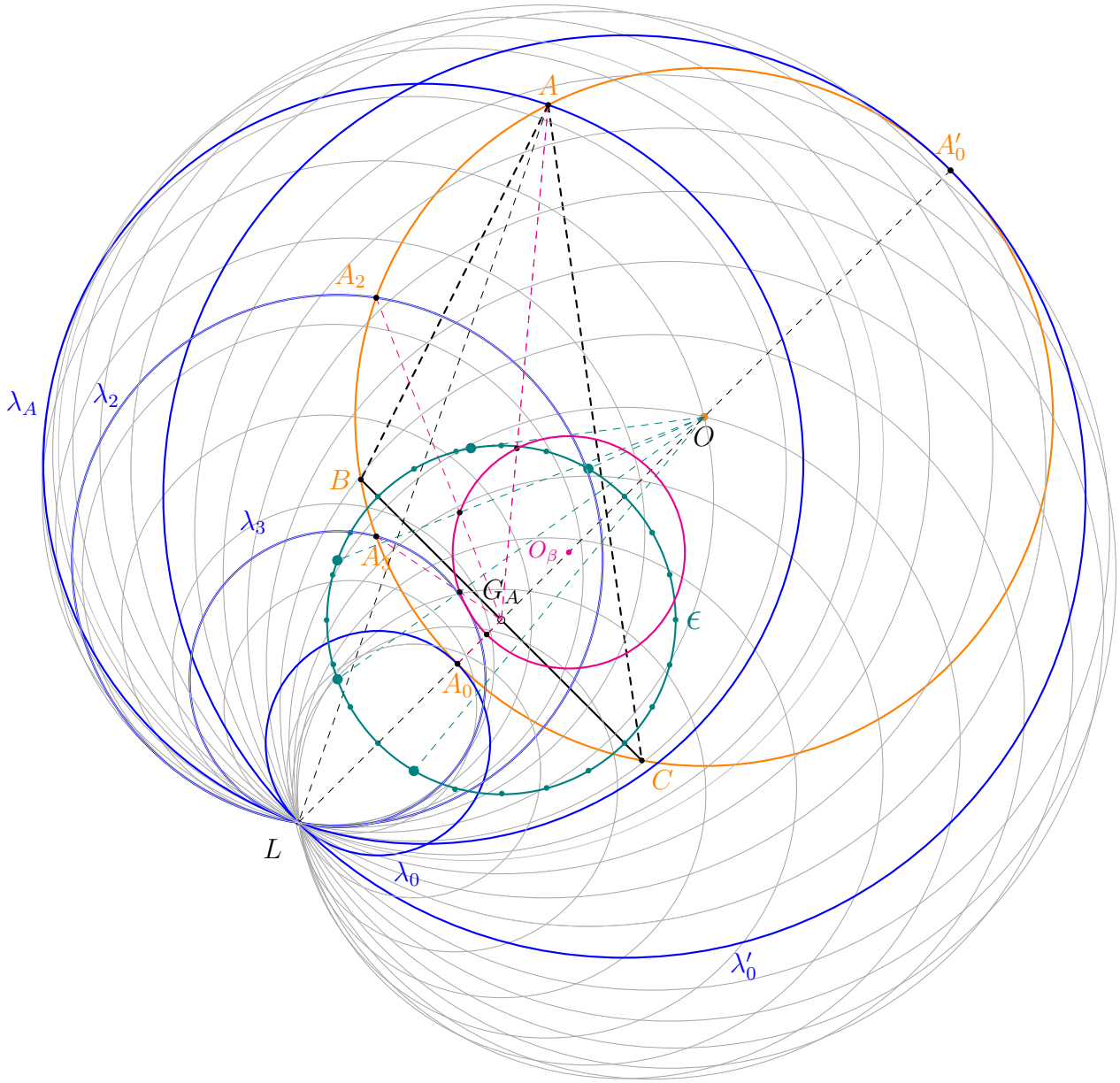


Figure 3

18. Malheureusement, cela ne détermine pas encore l'enveloppe de tous les pseudo-cercles d'Euler de ce type λ_A …

Le problème est le suivant. Chacun des pseudo-cercles d'Euler λ_A n'est tangent à l'enveloppe recherchée qu'en *un seul* point ! Il s'agit de *déterminer* ce point unique.

Dans le cas particulier des pseudo-cercles d'Euler λ_O ou λ'_O de la figure 3, ce n'est pas bien difficile : les points A_O et A'_O conviennent manifestement.

Mais comment faire pour le pseudo-cercle d'Euler (quelconque) λ_A dans cette même figure ? On visualise *approximativement* où situer ce point de tangence, mais comment le déterminer exactement ?

4. L'enveloppe des pseudo-cercles d'Euler : sa géométrie

On se propose de déterminer l'enveloppe des cercles — ou plutôt des pseudo-cercles d'Euler — et on souhaite le faire de manière *strictement géométrique*, sans recourir à la résolution d'équations algébriques, ou différentielles.

19. La famille de cercles dont il s'agit de déterminer l'enveloppe est donc formée de pseudo-cercles d'Euler qui, comme on l'a démontré dans la section précédente (cfr. les n° **14** et **15**), passent tous par le point fixe L. Tout pseudo-cercle d'Euler dans cette famille sera désormais noté sous la forme [3] :

$$\lambda_{\text{un indice, caractéristique de ce cercle}}$$

20. On désigne par Γ le cercle de centre O et passant par les deux points (distincts) B et C ou, de manière équivalente : circonscrit au triangle ABC pour une position *ad hoc* du sommet A. Suivant la définition du n° **11**, tous les pseudo-cercles d'Euler de la famille considérée ici ont leur centre situé sur le cercle ε et passent par un point (variable) de ce cercle Γ, en plus de passer tous par le point (fixe) L.

De plus, lorsqu'une droite issue du point L coupe ce cercle circonscrit Γ en un point A, le point-milieu du segment $[A\mathrm{L}]$ est le centre d'un cercle d'Euler, c'est-à-dire qu'il est à mi-distance de A et de L, et réciproquement. Ou, plus brièvement, suivant les n° **14** et **16** : l'homothétie de facteur 2 et de centre le point L applique le cercle ε des centres des cercles d'Euler sur le cercle circonscrit Γ.

21. On note désormais $\mathfrak{E}$ la courbe-enveloppe de cette famille de pseudo-cercles d'Euler, courbe-enveloppe qu'on cherche donc à caractériser.

Cela demande d'analyser la profusion de pseudo-cercles d'Euler dans les images que fournit *tkz-euclide*. On y *voit* la *succession* des cercles qui engendrent l'enveloppe, mais c'est l'organisation de leurs positions relatives, dans cette succession, qu'il s'agit d'analyser !

Ce n'est pas tout à fait immédiat …

• Comment déterminer un (seul) point de l'enveloppe ?

22. On considère la situation suivante.

On se donne une droite d, issue du point fixe L, telle que son intersection avec le cercle ε des centres des cercles d'Euler consiste en deux points distincts, notés 0 et $0'$ (cfr. la figure 4 plus loin).

Suivant ce qui a été rappelé au n° **20** ci-dessus, chacun de ces points est le centre d'un pseudo-cercle d'Euler, noté respectivement $\lambda_{(0)}$ pour celui de centre 0, et $\lambda_{(0')}$ pour celui de centre $0'$. On note encore $0-d$ et $0'-d$ les points d'intersection $d \cap \Gamma$, en convenant que :

$$\{0-d\} \coloneqq \lambda_0 \cap \Gamma \cap d$$

et pareillement, que : $\{0'-d\} \coloneqq \lambda_{0'} \cap \Gamma \cap d$. De manière équivalente, le segment dont les extrémités sont $0-d$ et L est un diamètre du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0)}$, et le segment dont les extrémités sont $0'-d$ et L est un diamètre du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0')}$.

(3). J'en profite pour signaler que, dans toute la suite, la notation — ou plutôt numérotation — de points *différents* par le *même* symbole permet de raccourcir les notations et de suivre au mieux les constructions, puisque le principe en est : les points de même numérotation proviennent du même objet géométrique, en général un (pseudo-)cercle (d'Euler).

23. Il est facile d'étendre au pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0')}$ tout ce qui, dans la suite, va être décrit et démontré pour le cercle $\lambda_{(0)}$. On se permet donc désormais de se limiter au seul cas du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0)}$.

La transposition des résultats qui vont suivre au cas du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0')}$ est ainsi laissée à la vigilante attention du lecteur.

24. Le point $0 - d$ est donc un point commun à la droite d et au pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0)}$. Mais au vu des images sous *tkz-euclide*, ce point *n*'est *pas*(4) un point de l'enveloppe $\mathfrak{E}$! Autrement dit :

$$0 - d \notin \mathfrak{E} \cap d$$

Et suivant ces mêmes images, ce point $\mathfrak{E} \cap d$ semble situé plus loin. Mais où ? La question qui se pose est donc de *déterminer* ce point $\mathfrak{E} \cap d$, sachant que d est une droite quelconque issue de L.

25. Le raisonnement pour répondre à cette question a recours à une propriété élémentaire — mais caractéristique ! — concernant l'intersection de deux cercles. Cette propriété est la suivante.

Théorème de la corde commune

Si deux cercles sont proprement sécants*, c'est-à-dire s'ils possèdent* deux *points d'intersection distincts, alors leur* ligne des centres — *la droite qui joint les* centres *de ces deux cercles* — *est* médiatrice *de leur* corde commune*, c'est-à-dire du segment limité par ces deux points d'intersection distincts.* ■

Ce résultat est d'autant plus utile ici que les centres des pseudo-cercles d'Euler en jeu sont sous contrôle, puisqu'ils sont tous situés sur le cercle ε. De plus, tous ces pseudo-cercles d'Euler passent aussi et toujours par le point L.

26. L'idée est d'utiliser le résultat précédent pour comparer entre elles les intersections de pseudo-cercles d'Euler avec la droite d. Plus précisément : on veut déterminer si un pseudo-cercle d'Euler donné coupe la droite d en un point plus éloigné de L que ne le fait le cercle $\lambda_{(0)}$, c'est-à-dire en un point plus éloigné de L que le point $0 - d$.

Pour obtenir une réponse à cette question, on a besoin d'une *construction*, et ensuite de la *démonstration d'un résultat* associé à cette construction.

— Désormais, le recours à la figure 4 est vivement conseillé, sinon indispensable —

(4). A deux exceptions près, déjà observées plus haut : les points A_O et A'_O, associés aux cercles λ_O et λ'_O ; cfr. par exemple la figure 3.

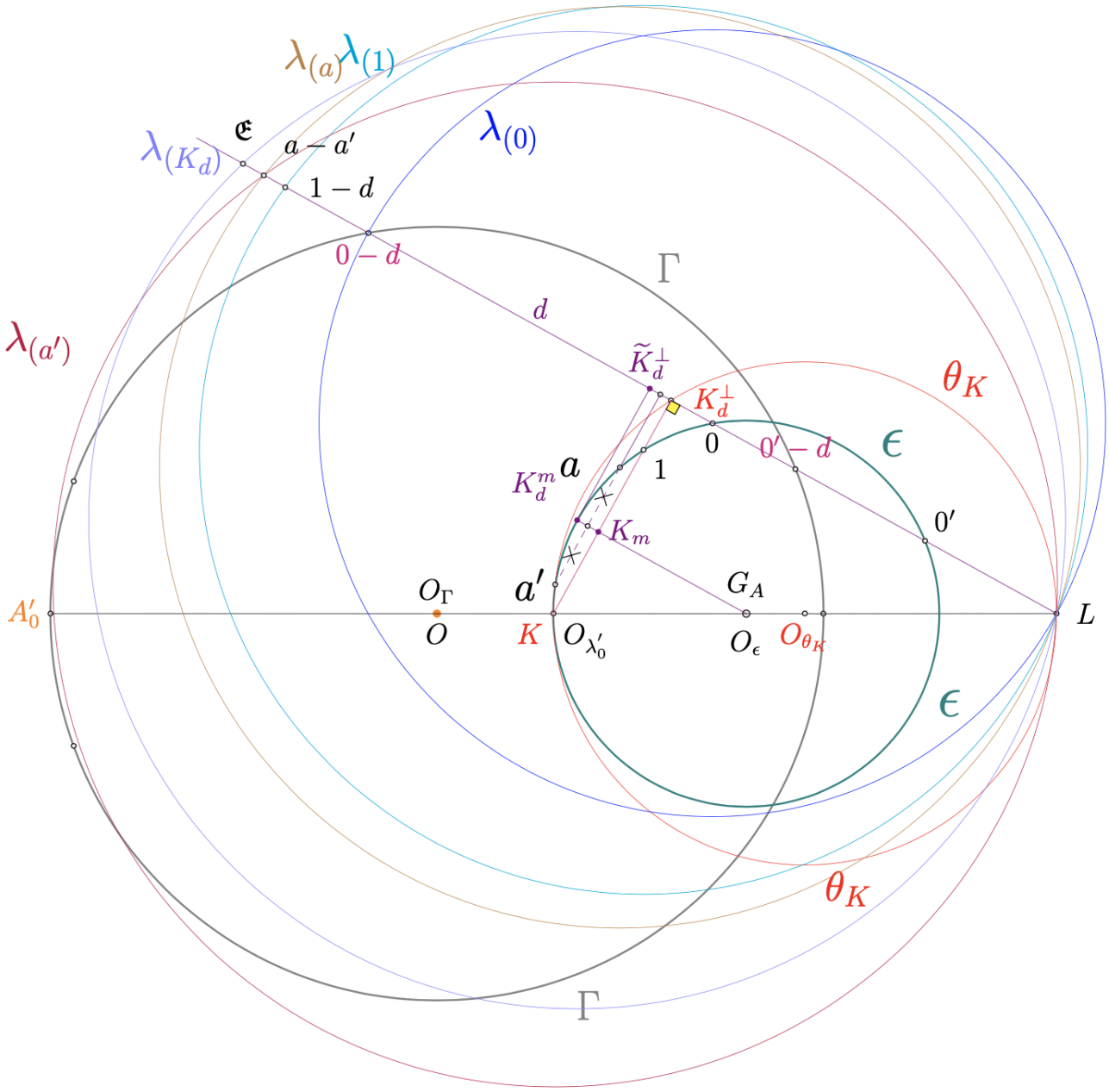


Figure 4

27. Il existe un pseudo-cercle d'Euler relativement « grand » : celui déjà décrit à la fin du n° **17**, noté λ'_{O}. Le segment $[A'_{\mathrm{O}}\mathrm{L}]$ en constitue un diamètre. Pour abréger [5], on note désormais K son centre.

28. On imagine alors un point $1 \in \varepsilon$, supposé proche (et en-dessous) du point $0 \in \varepsilon$, et on veut le choisir comme centre d'un nouveau pseudo-cercle d'Euler, noté $\lambda_{(1)}$. On note pareillement 1 le point diamétralement opposé au point L sur ce pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(1)}$, et on note encore $1 - d$ le point d'intersection de ce pseudo-cercle d'Euler avec la droite d.

A première vue, ce point $1 - d$ *semble plus éloigné* de L que ne l'est le point $0 - d$.

(5). On aurait dû noter ce centre : $\mathrm{O}_{\lambda'_{\mathrm{O}}}$. Mais comme on devra faire encore souvent référence à ce point — et pas seulement en tant que centre d'un cercle — il a semblé préférable d'abréger la notation en K, tout simplement.

29. On se propose de bien, sinon de *mieux* choisir ce point $1 \in \varepsilon$.

On introduit pour cela un nouveau cercle [6], de diamètre $[K\mathrm{L}]$, noté Θ_K, et dont le centre — le point-milieu du segment $[K\mathrm{L}]$, est (donc) désigné par O_{Θ_K}. On note $K_d^\perp$ le point d'intersection de ce cercle Θ_K avec la droite d. Le triangle $KK_d^\perp\mathrm{L}$ est donc un triangle *rectangle* en $K_d^\perp$, puisque le segment $[K\mathrm{L}]$ est un diamètre du cercle Θ_K.

On *précise* alors la position du point $1 \in \varepsilon$, évoqué plus haut, en lui *imposant* d'être le point d'intersection de la droite $d_{KK_d^\perp}$ avec le cercle ε.

30. A quoi peut bien servir cette précision, dans le choix du point $1 \in \varepsilon$?

Le point K est le centre du « grand » pseudo-cercle d'Euler λ'_{O}. Et 1 est celui du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(1)}$. Leur ligne des centres est donc la droite $d_{1K} = d_{K_d^\perp K}$. Or, en vertu du **Théorème de la corde commune**, le point $K_d^\perp$ doit donc être le pied de la médiatrice du segment qui joint L au (deuxième) point de contact des pseudo-cercles d'Euler λ'_{O} et $\lambda_{(1)}$.

L'application de ce théorème livre alors trois conséquences importantes.

- D'abord, avec les choix faits, le second point d'intersection des pseudo-cercles d'Euler λ'_{O} et $\lambda_{(1)}$ est donc aussi et nécessairement situé sur la droite d.
- Cela implique en particulier que le point $1-d$ est *le* point d'intersection des pseudo-cercles d'Euler λ'_{O} et $\lambda_{(1)}$ (en dehors de L).
- Enfin, puisque le point $K_d^\perp$ est le *milieu* du segment qui joint L au (deuxième) point de contact des cercles λ'_{O} et $\lambda_{(1)}$, cela signifie surtout que la distance entre les points L et $1-d$ est (strictement) supérieure à celle entre les points L et $0-d$.

Le pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(1)}$ coupe donc *effectivement* la droite d *plus loin* que ne le fait le pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0)}$.

31. On peut maintenant poursuivre et achever la construction annoncée au n° **26**.

On note K_d le point-milieu de l'arc de cercle qui va du point K au point $1 \in \varepsilon$ (qui vient d'être construit). Ce point K_d appartient donc au cercle ε, lieu des centres des pseudo-cercles d'Euler dont on cherche l'enveloppe.

On peut alors, et enfin, formuler le résultat annoncé (aussi) au n° **26**, et qui permet de déterminer *exactement* un des points de $\mathfrak{E} \cap d$.

Proposition 1

Le pseudo-cercle d'Euler de centre le point K_d et de rayon égal à $|K_d\mathrm{L}|$ coupe la droite d en deux points, dont l'un est — évidemment ! — le point L, *et l'autre* est *l'intersection de la droite d avec la courbe-enveloppe $\mathfrak{E}$.*

Démonstration. Elle occupe les n° **32** à **35**. La figure 5 ci-après — qui n'est qu'un agrandissement de la figure 4 — permet peut-être de mieux suivre une partie du raisonnement.

32. On considère le rayon $\mathrm{O}_\varepsilon K_d$ du cercle ε, lieu des centres des cercles d'Euler, et dont le point O_ε est le centre [7].

Si a est un point quelconque, mais situé sur l'arc du cercle ε qui va du point K_d au point $1 \in \varepsilon$, on note a' le symétrique orthogonal de ce point a par rapport au rayon $\mathrm{O}_\varepsilon K_d$. Comme ces deux points sont tous les deux situés sur le cercle ε, le point a est donc le centre d'un pseudo-cercle d'Euler noté $\lambda_{(a)}$ et de rayon égal à $|a\mathrm{L}|$, tandis que le point a' est le centre d'un autre pseudo-cercle d'Euler, noté $\lambda_{(a')}$, et de rayon égal à $|a'\mathrm{L}|$.

(6). Encore !?! Oui, mais ce *n*'est *pas* un pseudo-cercle d'Euler, lui !
(7). Pour mémoire : ce centre $\mathrm{O}_\varepsilon = G_A$, qui est le point-milieu du côté BC (cfr. le n° **7**).

33. Par définition du point K_d, le rayon $O_\varepsilon K_d$ est perpendiculaire à la corde qui joint K au point $1 \in \varepsilon$. Mais cette corde — par construction de ce point $1 \in \varepsilon$ (cfr. les n° **29** et **30**) — a comme support la droite $d_{KK_d^\perp}$, qui est elle-même perpendiculaire à la droite d. Le rayon $O_\varepsilon K_d$ est donc parallèle à la droite d.

Mais alors, à cause de la construction par symétrie orthogonale des points $a \in \varepsilon$ et $a' \in \varepsilon$, la droite $d_{aa'}$ est elle aussi perpendiculaire à la droite d.

Or, cette droite $d_{aa'}$ est *aussi* la droite des centres des pseudo-cercles d'Euler $\lambda_{(a)}$ et $\lambda_{(a')}$.

Le **Théorème de la corde commune** implique alors — et d'abord ! — que ces deux pseudo-cercles d'Euler ont donc leurs *deux* points communs situés sur la droite d. C'est évidemment évident pour le point L, mais cela signifie surtout que l'*autre* point d'intersection, noté $a - a'$ dans la figure 4, est effectivement situé *sur* la droite d.

34. D'autre part, et suivant encore la définition des points $a \in \varepsilon$ et $a' \in \varepsilon$, le pied de la droite $d_{aa'}$ — en tant que perpendiculaire à la droite d — est situé *entre* le point $K_d^\perp$ et la projection orthogonale, notée $\widetilde{K}_d^\perp$, du point K_d sur la droite d. Et cette droite $d_{aa'}$ est, toujours suivant le **Théorème de la corde commune**, justement la *médiatrice* de la corde commune des deux pseudo-cercles d'Euler $\lambda_{(a)}$ et $\lambda_{(a')}$.

Or, par construction, ce pied de la droite $d_{aa'}$ est plus éloigné du point L que le point $K_d^\perp$.

Cela implique que le point d'intersection $a - a'$ des pseudo-cercles d'Euler $\lambda_{(a)}$ et $\lambda_{(a')}$ — dont on sait déjà qu'il est situé sur la droite d — est plus éloigné du point L que ne l'est le point d'intersection $1 - d$ du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(1)}$ avec la droite d.

Et de plus, comme on sait déjà que la distance entre les points L et $1 - d$ est (strictement) supérieure à celle entre les points L et $0 - d$ (cfr. la fin du n° **30**), on a ainsi établi un *ordre de position* entre les points d'intersection de certains pseudo-cercles d'Euler avec la droite d, ordre qu'on peut symboliser par :

$$a - a' \prec 1 - d \prec 0 - d$$

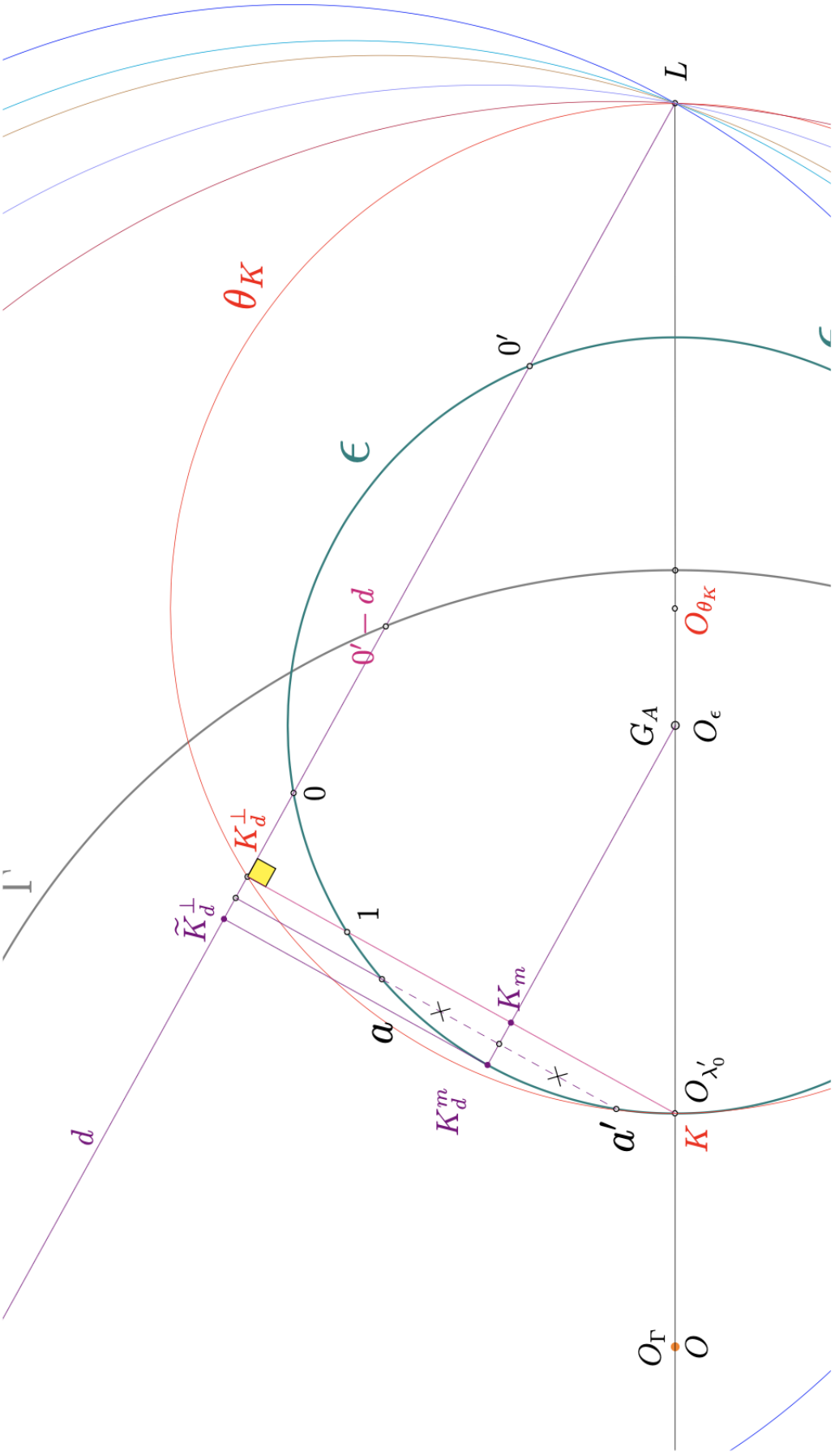

L
θ_K
ϵ
$0'$
$0'-d$
O_{θ_K}
G_A
O_ϵ
0
1
$K_d^\perp$
$\widetilde{K}_d^\perp$
K_m
K_d^m
a
a'
$O_{\lambda'_0}$
K
d
O_Γ
O

Figure 5

35. Mais alors, il est clair que le point $K_d \in \varepsilon$, tel qu'il a été défini, est le *point-limite des positions* des points a et $a' \in \varepsilon$. En ce sens qu'il fournit, par projection orthogonale, le point $\widetilde{K}_d^{\perp} \in d$ qui est *le plus éloigné possible* du point L.

De tous les pseudo-cercles d'Euler, celui dont le centre est le point K_d est donc celui dont le point d'intersection avec la droite d est le plus éloigné possible du point L. Ce point d'intersection est donc exactement le point recherché : $\mathfrak{E} \cap d$. ■

36. Comme annoncé au n° **23**, il y a un résultat correspondant à la **Proposition 1**, au départ d'une construction — analogue à celle qui a été décrite en long et en large pour le pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0)}$ — appliquée cette fois-ci au pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(0')}$. Et cette construction concerne encore l'intersection de l'enveloppe $\mathfrak{E}$ avec la *même* droite d issue du point L.

On se limite ici à en résumer le résultat.

On note K'_d le point obtenu comme image du point K_d par la symétrie centrale de centre $\mathrm{O}_\varepsilon = G_A$. Ce point K'_d appartient donc au cercle ε.

Proposition 1 bis

Le pseudo-cercle d'Euler de centre le point K'_d et de rayon égal à $|K'_d\mathrm{L}|$ coupe la droite d en deux points, dont l'un est — évidemment ! — le point L, *et l'autre* est *l'intersection de la droite d avec la courbe-enveloppe $\mathfrak{E}$.* ■

Ce résultat est illustré (partiellement) dans la figure 7 plus loin.

• L'enveloppe est une conchoïde de cercle

37. On rappelle rapidement ce qu'est une *conchoïde de cercle.*

On se donne un point L et un cercle directeur Δ, de centre O. On fixe une longueur $\ell \geqslant 0$.

Alors, quelle que soit la droite d issue du point L et sécante avec le cercle directeur, on porte de part et d'autre d'un point d'intersection $T_\mathrm{O} \in d \cap \Delta$ la longueur ℓ, déterminant ainsi deux points T et T', pour lesquels on a donc :

$$|T_\mathrm{O}T| = |T_\mathrm{O}T'| = \ell$$

La conchoïde de cercle, de pôle L, de cercle directeur Δ et de paramètre ℓ est le lieu des points T et T' ainsi déterminés.

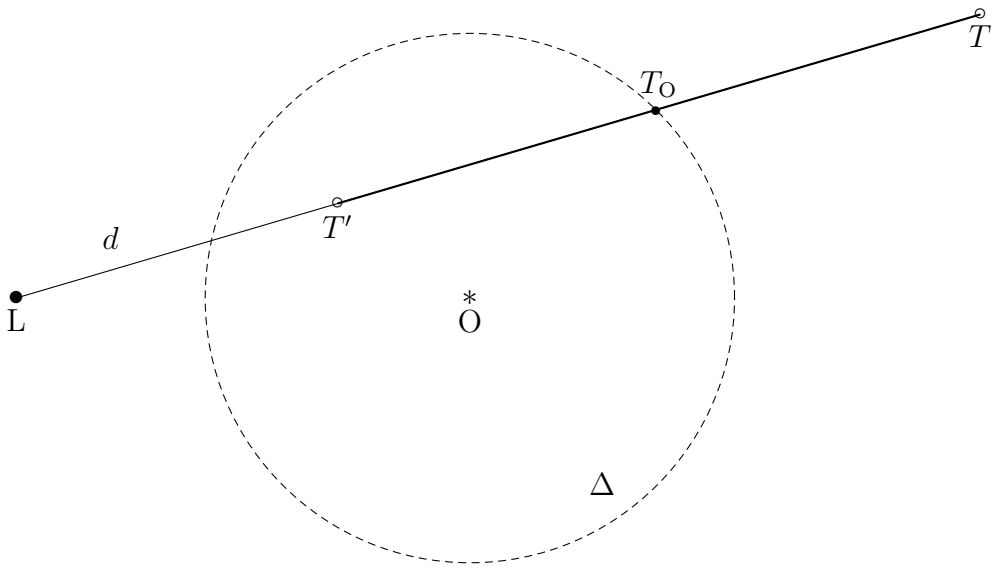


Figure 6

Cette définition connait de nombreuses variantes, essentiellement liée à la nature de la courbe directrice qui y intervient. Il existe en particulier des conchoïdes de droite, des conchoïdes de parabole (Cfr. A. DÜRER), etc.

38. En conservant les notations qui sont utilisées depuis le n° **19**, on peut achever de répondre à la question de déterminer l'enveloppe des pseudo-cercles d'EULER. La situation qui est en jeu maintenant est illustrée à la figure 7 ci-dessous.

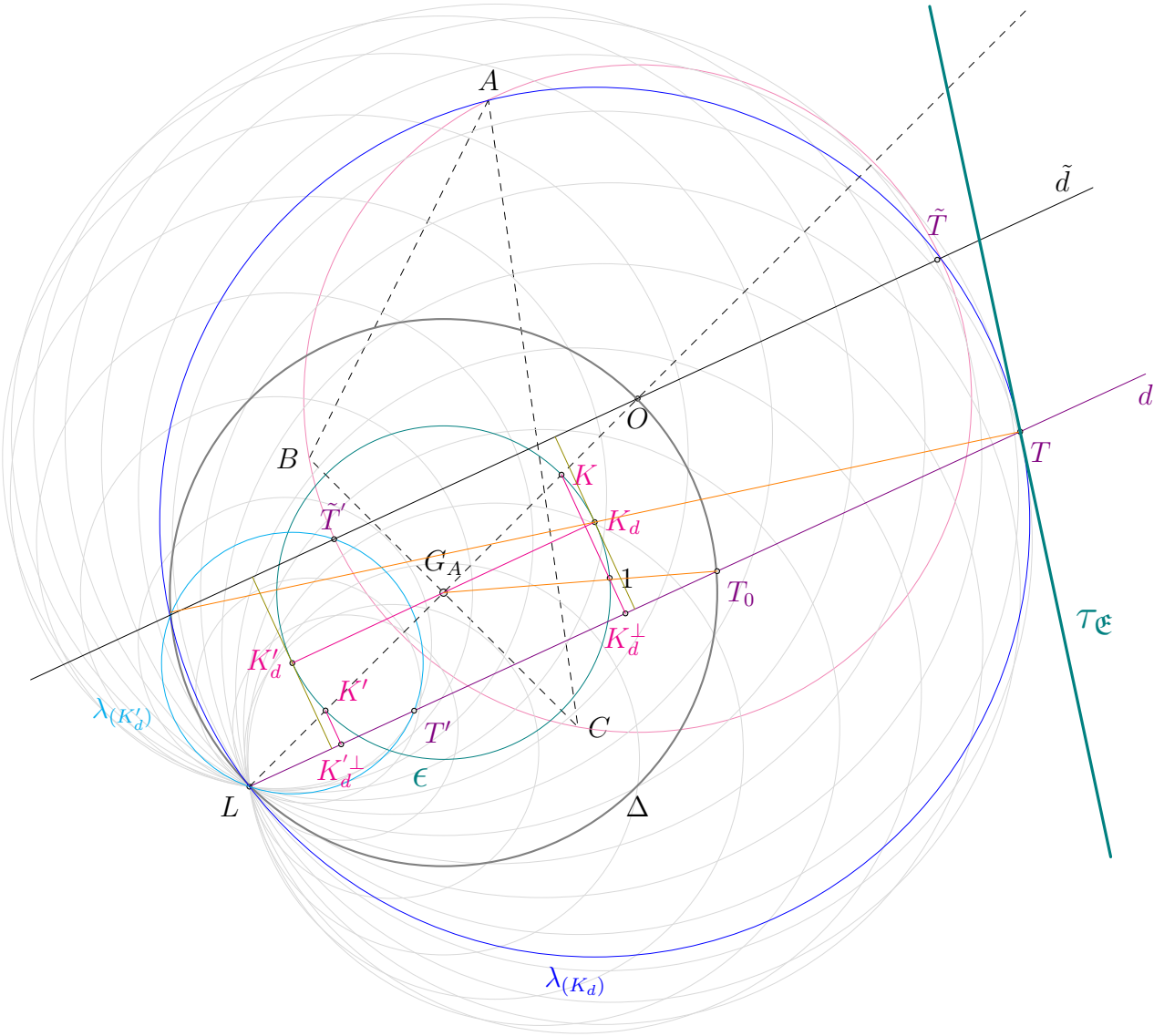


Figure 7

Le cercle en points épais, centré en G_A est le cercle ε des centres des cercles d'EULER, omniprésent dans tous les dessins. Les points K, $K_d^\perp$, K_d et K', $K_d'^\perp$, K'_d sont ceux qui font l'objet de la **Proposition 1** et de la **Proposition 1 bis**.

Le cercle Δ est, ici, un nouveau venu : c'est le cercle de diamètre [OL], et centré lui aussi au point $G_A = \mathrm{O}_\varepsilon$. On note T_O le point d'intersection — autre que L — de la droite d avec ce nouveau cercle Δ.

On note encore $\lambda_{(K_d)}$ le pseudo-cercle d'EULER de centre $K_d \in \varepsilon$, et $\lambda_{(K'_d)}$ le pseudo-cercle d'EULER de centre $K'_d \in \varepsilon$. Et on ajoute encore à ce déluge de notations celles des points d'intersection T et T' de la droite d avec ces pseudo-cercles d'EULER, de telle sorte que :

$$\{\mathrm{L}, T\} \coloneqq \lambda_{(K_d)} \cap d \qquad \text{et} \qquad \{\mathrm{L}, T'\} \coloneqq \lambda_{(K'_d)} \cap d$$

La **Proposition 1** et la **Proposition 1 bis** ont établi que :

$$T \in \mathfrak{E} \cap d \qquad \text{et} \qquad T' \in \mathfrak{E} \cap d$$

39. On rappelle que la droite d, pourvu qu'elle ait deux points de contact avec le cercle ε des centres des pseudo-cercles d'Euler est, à part cela, quelconque.

Proposition 2

Les deux points d'intersection T et T' de la droite d avec l'enveloppe $\mathfrak{E}$ sont toujours à égale distance *du point $T_{\mathrm{O}} \in \Delta \cap d$.*

Démonstration. Elle est l'objet des n° **40** et **41** ci-dessous. La symétrie orthogonale — introduite dès le n° **32** — dont l'axe est la droite $d_{G_A K_d}$ fait l'essentiel du travail.

40. En effet, par construction des points en jeu, cette symétrie orthogonale envoie le point $K \in \varepsilon$ sur le point $1 \in \varepsilon$. Elle envoie donc aussi le cercle ε sur lui-même. Et elle fait de même pour le cercle Δ, puisque le point G_A en est le centre. La droite $d_{G_A K}$ est donc envoyée par cette symétrie orthogonale sur la droite $d_{G_A 1}$, et les points d'intersection de ces droites avec le cercle Δ doivent donc aussi correspondre l'un à l'autre sous cette symétrie. Dès lors, les points G_A, 1 et T_{O} doivent être alignés.

Les pseudo-cercles d'Euler $\lambda_{(K_d)}$ de centre $K_d \in \varepsilon$, et $\lambda_{(K'_d)}$ de centre $K'_d \in \varepsilon$ sont eux aussi — et à nouveau, quasiment par construction — leur propre image sous cette symétrie orthogonale.

Enfin, notant $\widetilde{d}$ l'image de la droite d par cette symétrie orthogonale, la droite $d_{\mathrm{L}K_d}$ coupe la droite $\widetilde{d}$ en un point noté $\widetilde{T}$, qui appartient autant à la droite $\widetilde{d}$ que le point T appartient à la droite d.

41. On peut continuer ainsi — et longtemps ! — ce jeu de symétrie orthogonale. Mais pour ce qui importe ici, il suffit maintenant de raisonner comme suit.

On note $\widetilde{T'}$ le point diamétralement opposé au point L dans le pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(K'_d)}$ de centre K'_d. Pour toutes les raisons accumulées dans le n° précédent, il est clair que $\widetilde{T'} \in \widetilde{d}$.

Et pour toutes ces mêmes raisons, on a d'abord :

$$|\widetilde{T'}\mathrm{O}| = 2 \cdot |K'_d G_A| \qquad \text{et} \qquad |\widetilde{T}\mathrm{O}| = 2 \cdot |K_d G_A|$$

Or, par construction : $|K'_d G_A| = |K_d G_A|$. Il s'ensuit immédiatement que :

$$|\widetilde{T'}\mathrm{O}| = |\widetilde{T}\mathrm{O}|$$

La merveilleuse symétrie orthogonale dont il a déjà été beaucoup question implique alors, en raisonnant si besoin en termes des cercles Δ, $\lambda_{(K_d)}$ et $\lambda_{(K'_d)}$ (globalement invariants sous cette symétrie orthogonale, comme on l'a déjà signalé) que :

$$|T'T_{\mathrm{O}}| = |TT_{\mathrm{O}}|$$

■

42. La **Proposition 2** établit la nature de l'enveloppe $\mathfrak{E}$ de la famille des pseudo-cercles d'Euler considérée dès le n° **19** : c'est effectivement une *conchoïde de cercle*, de pôle le point L et dont le cercle directeur est le cercle Δ défini au n° **38**.

La dernière partie du raisonnement précédent permet d'évaluer immédiatement le paramètre ℓ de cette conchoïde, tel qu'il est défini au n° **37** :

$$|TT_{\mathrm{O}}| = |\widetilde{T}\mathrm{O}| = 2 \cdot |K_d G_A| = |K'_d K_d|$$

Ce paramètre est donc égal au *diamètre* du cercle ε des centres des cercles d'Euler.

43. La figure 7 montre aussi comment tracer la *tangente géométrique* à l'enveloppe $\mathfrak{E}$ au point $T = \mathfrak{E} \cap d$.

Pour cela [8], on trace la tangente géométrique, notée $\tau_{\mathfrak{E}}$, à ce pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(K_d)}$, qui détermine le point T par son intersection (autre que L) avec la droite d. Autrement dit : on trace la perpendiculaire à la droite d_{K_dT} en son point T, sachant que K_d est le centre du pseudo-cercle d'Euler $\lambda_{(K_d)}$.

44. On peut avoir l'impression que la démonstration de la **Proposition 1** est incomplète, et qu'il en est de même pour celle de la **Proposition 2**.

En effet : que se passe-t-il lorsque la droite d *ne* coupe *plus* le cercle ε des centres des pseudo-cercles d'Euler en deux points ?

Dans de tels cas, les deux points 0 et $0' \in \varepsilon$, introduits dès le n° **22** et définis là comme les deux points d'intersection de la droite d avec le cercle ε des centres des pseudo-cercles d'Euler, deviennent donc soit « deux » points confondus, soit n'existent tout simplement plus ! Alors … ?

Alors … cela n'affecte *en rien* les démonstrations proposées des deux résultats !

Pourquoi ? Parce que les deux points 0 et $0' \in \varepsilon$ *n*'interviennent *pas* dans les démonstrations en question. Ils ne servent qu'à introduire (à partir du n° **28**) la construction du point $1 \in \varepsilon$, et cela pour ne pas donner l'impression que cette construction tombe du ciel.

Et ces deux points ne servent pas à grand chose parce que seule la projection orthogonale du point K sur la droite d est significative ! Car cette projection orthogonale *suffit* à déterminer le point $1 \in \varepsilon$, ce qui est tout ce dont on a besoin pour faire tourner la machine. Une relecture des démonstrations en question permet facilement de s'en convaincre, si besoin.

45. Dans le même contexte, la figure 8 ci-après illustre la situation de la **Proposition 2**, dans le cas où la droite d est tangente au cercle ε des centres des pseudo-cercles d'Euler.

(8). Une démonstration géométrique complète demande d'établir « à la Newton » que le point K_d est une espèce de centre instantané de rotation du cercle $\lambda_{(K_d)}$, relativement aux cercles qui l'avoisinent. La méthode de démonstration de la **Proposition 2** en donne le moyen.

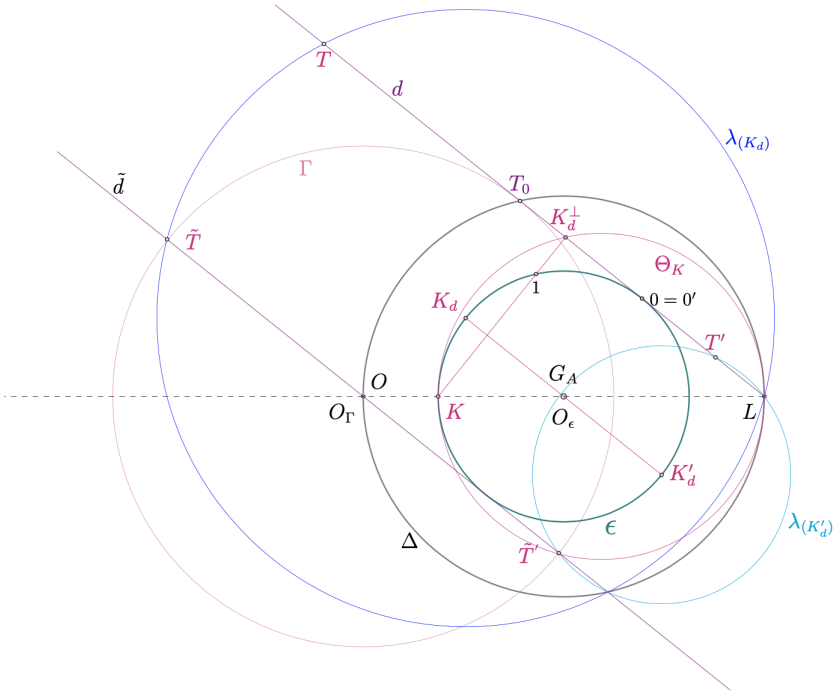


Figure 8

46. Et pareillement, la figure 9 illustre la situation de la **Proposition 2**, dans le cas où la droite d est complètement extérieure au cercle ε des centres des pseudo-cercles d'Euler.

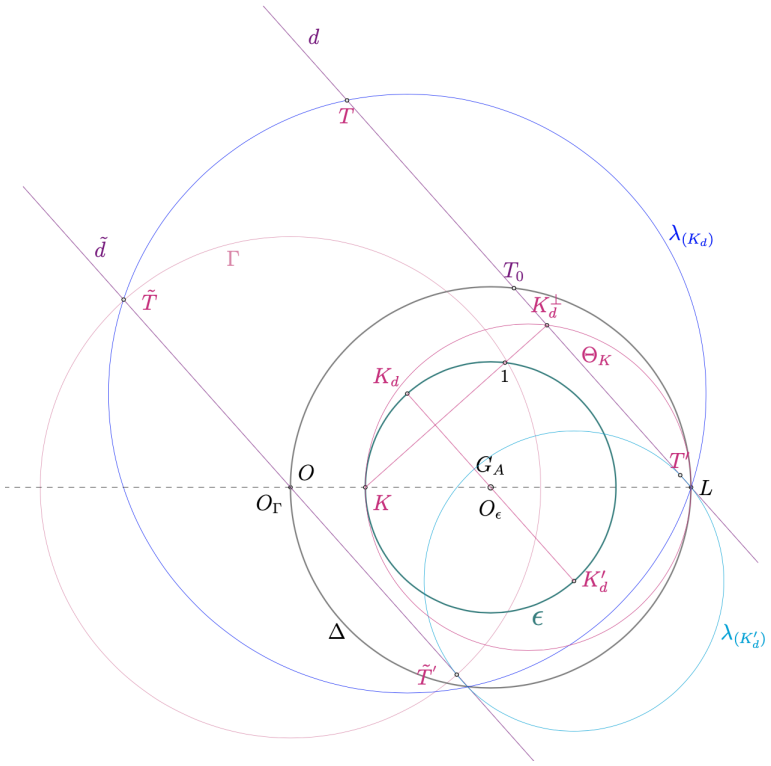


Figure 9

• **A propos de l'équation tangentielle de l'enveloppe-conchoïde de cercle**

47. Comme on s'est interdit d'écrire des équations algébriques, ou différentielles, il s'agit d'équation tangentielle *au sens géométrique*.

Cela signifie : sait-on tracer la tangente en un point quelconque de la conchoïde sans passer d'abord par le tracé de la courbe ? Ou, mieux : sait-on tracer *toutes* les tangentes en tous les points de la conchoïde, sans passer d'abord par le tracé de la courbe ?

La réponse a été donnée dans le n° **43**.

Elle est encore illustrée dans la figure 10. Mais on s'y est limité à ne tracer que les tangentes géométriques à quelques points de la conchoïde.

On y a aussi représenté dix-neuf exemples de *couples* de points de la courbe, comme illustration de la *définition* même de conchoïde.

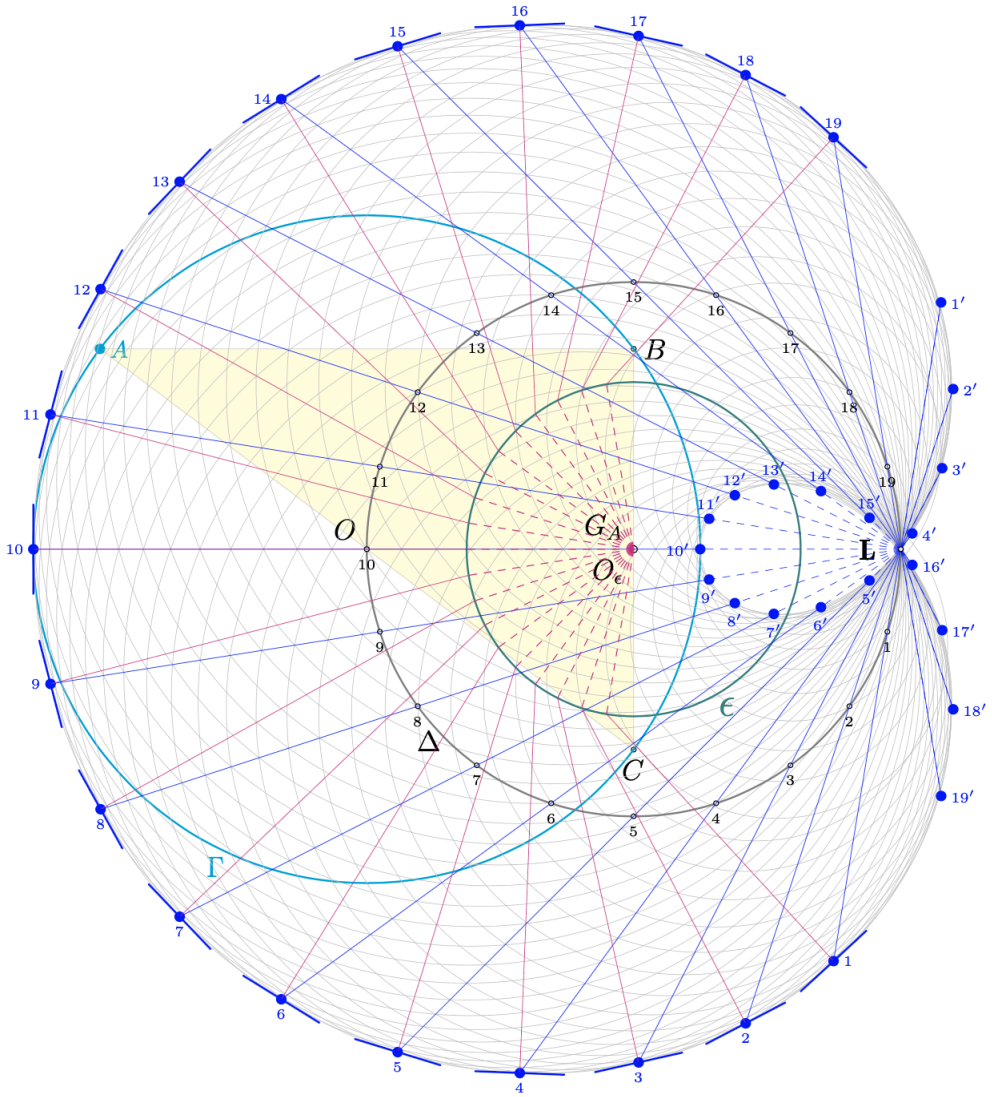


Figure 10

Bibliographie

[1] Lupsin, G. et Graas, G., *Géométrie analytique plane* (Neuvième édition). La Procure, Namur, p. 46. 1966.