Un soupçon d'informatique dans un plat de mathématiques : l'informathématique



On attire par le sourire...

On retient par le contenu



J.-M. Desbonnez & P. Tilleuil

Padovan et compagnie

- la suite de Padovan
- le nombre de plastique
- une fonction du troisième degré
- l'algorithme de Newton-Raphson
- la fractale de Newton
- la spirale de Padovan

La suite de Padovan

Richard PADOVAN (1935 —) est un architecte anglais (toujours en vie au 12 février 2026). C'est un autre architecte, Hans VAN DER LAAN (1904—1991), moine bénédictin des Pays-Bas, qui a donné le nom à la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} p_1 = 1 \\ p_2 = 1 \\ p_3 = 1 \\ p_{n+1} = p_{n-1} + p_{n-2} \end{cases}$$

Voici les 50 premiers termes (voir code Python SuitePadovan.py) :
1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, 41824, 55405, 73396, 97229, 128801, 170625, 226030, 299426, 396655, 525456, 696081

La suite semble anodine...

Intéressons-nous à la suite des $x_n = \dfrac{p_{n+1}}{p_n}$, un peu (beaucoup) comme le traitement de la suite de FIBONACCI qui fait apparaître le nombre d'or Φ.

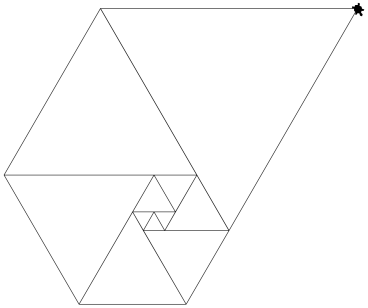
$$\frac{9}{7}, \ldots, \frac{200}{151}, \ldots, \frac{4410}{3329} \ldots, \frac{31572}{23833} \ldots, \frac{696081}{525456}, \ldots$$

Un tableur peut bien nous aider... demandez au présentateur !

La suite des x_n semble converger (très vite) vers $1.3247179572448\ldots$

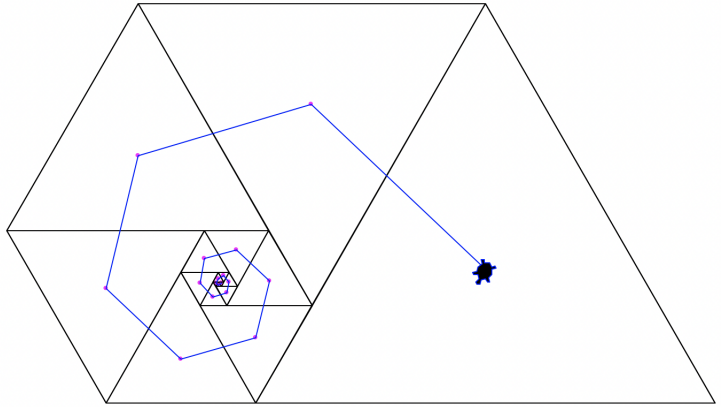
La spirale des triangles de Padovan

Dessinons une suite de triangles équilatéraux dont les côtés sont les termes de la suite de Padovan.
Pour info, un élève de P6 sait dessiner un triangle équilatéral avec une règle et un compas. . . c'est donc de son niveau !
(voir code Python spirale.py)



La spirale des centres de gravité

Sur chacun des triangles de la spirale, matérialisons son centre de gravité
(voir code Python spirale-centres-gravite.py)



La spirale des centres de gravité

Poussons un peu le bouchon...

Calculons la suite des distances entre les centres de gravité ainsi que la suite des rapports de chaque distance avec la précédente :

```
2.8867513459481287
2.8867513459481287
5.000000000000013
5.773502691896252
7.637626158259728
10.408329997330666
13.228756555322953
18.027756377319974
23.62907813126306
31.224989991992032
41.63331998932271
54.84827557301453
72.85830998131478
96.47970425604215
127.70408502993695
169.3369422187613
224.18370443306878
```

```
1.0
1.732050807568882
1.1547005383792472
1.3228756555322956
1.362770287738495
1.2709778186044847
1.362770287738496
1.310705427603287
1.3214645877648101
1.3333333333333333
1.3174129660349196
1.3283609962235754
1.3242100219012123
1.3236367795140638
1.3260103792221258
1.323891299179435
```

Vers une équation du troisième degré...

Revenons à la suite de Padovan.

Faisons en sorte de faire apparaître des quotients de la forme $\dfrac{\text{terme suivant}}{\text{terme}}$:

$$p_{n+1} = p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{p_{n-1}}{p_n} + \frac{p_{n-2}}{p_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\dfrac{p_n}{p_{n-1}}} + \frac{p_{n-2}}{p_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\dfrac{p_n}{p_{n-1}}} + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_n}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\dfrac{p_n}{p_{n-1}}} + \frac{1}{\dfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} \cdot \frac{1}{\dfrac{p_n}{p_{n-1}}}$$

En supposant que

$$\Psi = \lim_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\text{terme suivant}}{\text{terme}}$$

existe, et en passant à la limite dans la dernière égalité ci-contre, Ψ doit vérifier l'égalité

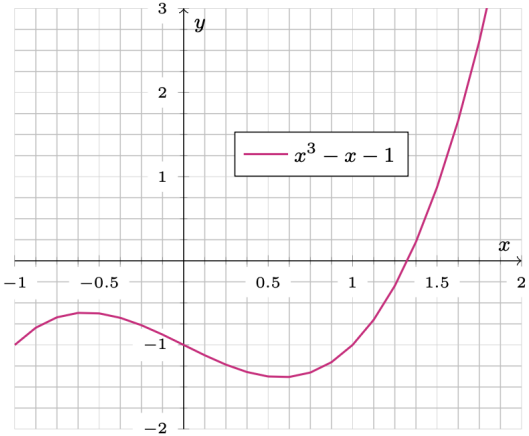
$$\Psi = \frac{1}{\Psi} + \frac{1}{\Psi} \cdot \frac{1}{\Psi}$$

que l'on ramène facilement à

$$\Psi^3 - \Psi - 1 = 0$$

. . . qui revient à chercher des racines. . .

. . . de la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$



Solution réelle de l'équation

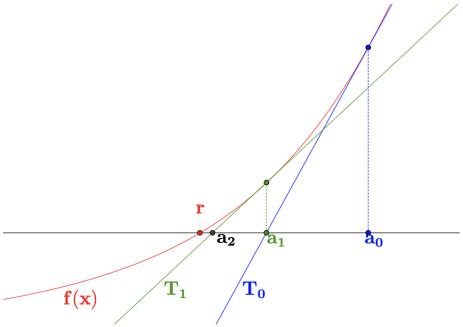
L'équation a 3 solutions, dont 1 réelle ; elle peut se calculer à l'aide de la formule de Cardan :

$$\Psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{23}{27}}} = 1,3247179572\ldots$$

Ce nombre Ψ a été baptisé nombre d'argent de par sa similitude avec le nombre d'or Φ, et aussi nombre plastique, au sens de la beauté architecturale, pour son utilisation en architecture (par exemple L'Abbaye Saint-Benoît de Vaals, Pays-Bas) allant même jusqu'au mobilier liturgique.

Mais on aimerait bien calculer les 2 autres ! Optons pour une méthode approchée : l'algorithme de Newton–Raphson.

Résolution de l'équation f(x)=0 – algorithme de Newton–Raphson



- On suppose $f(x)$ de classe C_1.
- Soit r une solution de l'équation $f(x) = 0$ (appelée *racine* ou *zéro*).
- Soit a_0 une valeur approchée de r et T_0 la tangente à $f(x)$ au point $\big(a_0, f(a_0)\big)$.
  $T_0 \equiv y = f(a_0) + f'(a_0) \cdot (x - a_0)$
- Si $f'(a_0) \neq 0$ ($T_0 \nparallel OX$), soit $a_1 = T_0 \cap OX$.

$$0 = f(a_0) + f'(a_0) \cdot (a_1 - a_0)$$

$$a_1 = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

- Et on recommence avec T_1 la tangente à $f(x)$ au point $\big(a_1, f(a_1)\big)$, ...
- La suite $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ converge, sauf exception, vers r.

Cette méthode est aussi valable dans l'ensemble des nombres complexes.

Il faut choisir une valeur « approchée » de la racine pour débuter les hostilités.

Voir algorithme Python CalculRacines.py (300 itérations de Newton).

- si on prend comme valeur de départ le complexe $1.5 + 1.5i$, la racine calculée est $1.324717957244746\cdots + 0i$, soit la racine réelle ;
- si on prend comme valeur de départ le complexe $-1.35 + 1.42i$, la racine calculée est $-0.662358978622373\cdots + 0.5622795120623013\ldots\ i$, soit une des deux racines complexes ;
- si on prend comme valeur de départ le complexe $-1.9 - 3i$, la racine calculée est $-0.662358978622373\cdots - 0.5622795120623013\ldots\ i$, soit l'autre racine complexe (la conjuguée).

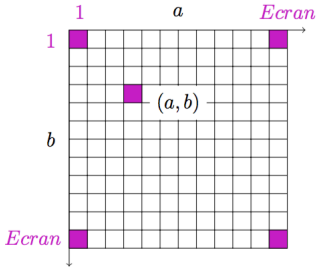
Pour le premier cas, on dit que $1.5 + 1.5i$ est un « attracteur » de la racine réelle $1.324717957244746\cdots + 0i$; idem pour les deux autres cas.

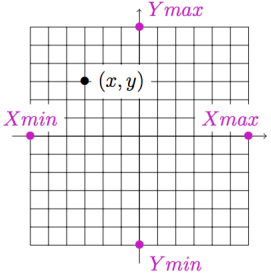
Bassin d'attraction – fractal de Newton

L'idée est de calculer « tous ? » les attracteurs de chacune des trois racines.
Quel déferlement de chiffres et de nombres !
Inimaginable, même dans un monde imaginaire tel que $\mathbb{C}$.

On va les **c o l o r i e r** !

À chaque attracteur d'une des trois racines, on va attribuer une couleur distincte.
L'image sera un ensemble de *pixels* colorés sur l'écran, dont l'origine du repère est en haut à gauche, alors que les calculs sont faits sur des nombres complexes, dans un repère cartésien...





On divise une fenêtre choisie $[Xmin, Xmax, Ymin, Ymax]$ en 400×400 (soit 160 000) points (en système cartésien) dont les coordonnées déterminent un attracteur potentiel, un point représentant un *pixel* sur l'écran.
Chaque point passe à la moulinette Newton (300 tours/fraction de seconde), et selon la racine qu'il détermine, il est colorié. Merci informatique !

L'image ainsi obtenue est appelée bassin d'attraction.

Voir code Python FractalNewton.py

